

Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde Bilangan Prima

^{1*}Bulqis Nebula Syechah, ²Evi Yuniartika Asmarani, ³Abdul Gazir Syarifudin,
⁴Dara Puspita Anggraeni, ⁵I Gede Adhitya Wisnu Wardhana

^{1,2,3,5}Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Mataram

⁴Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Nahdlatul Wathan Mataram, Mataram

Email: bulqisnebullas@unram.ac.id

Abstract

Graphs are now very interesting to study because in recent years graphs have begun to be used to describe abstract objects in number systems, such as groups and rings. Graphs represented the physical form of a group with the relations between its elements visible to the eye. Consequently, it is also possible to define the spacing between elements in a group using the characteristics of the graph itself. In this study, the authors discussed the properties of exponential graphs in groups of integers modulo with prime number order. The method used in this research was deductive proof. The results showed a power graph of a group of integers modulo with the order of a prime number n was a complete graph of K_n . A power graph in a group of integers modulo with the order of a prime number had the same radius and diameter, that was 1, as well as the same chromatic number and clique number, which was n .

Keywords: power graph; group; integer modulo

Abstrak

Graf kini sangat menarik untuk dikaji karena pada beberapa tahun terakhir graf mulai digunakan untuk menggambarkan objek abstrak pada sistem bilangan, seperti pada grup dan gelanggang. Graf menghadirkan bentuk fisik dari suatu grup dengan relasi antar elemennya terlihat kasat mata. Akibatnya, jarak antar elemen pada grup juga memungkinkan untuk didefinisikan menggunakan karakteristik dari graf itu sendiri. Pada penelitian ini, penulis membahas tentang sifat-sifat graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo yang berorder suatu bilangan prima. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *deductive proof*. Hasil yang didapatkan dari penelitian ini adalah Graf pangkat dari grup bilangan bulat modulo yang berorde suatu bilangan prima n adalah graf lengkap K_n . Graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo yang berorde suatu bilangan prima memiliki radius dan diameter yang sama, yaitu 1. Dan juga memiliki bilangan kromatik dan bilangan *clique* yang sama, yaitu n .

Kata kunci: graf pangkat; grup; bilangan bulat modulo

PENDAHULUAN

Graf sudah banyak diaplikasikan untuk berbagai hal, seperti untuk masalah *scheduling*, pengoptimuman hingga untuk menggambarkan fenomena molekuler pada bidang kimia. Dalam beberapa tahun terakhir, graf mulai digunakan untuk menggambarkan objek abstrak pada sistem bilangan, seperti pada grup ataupun gelanggang. Graf hadir untuk membuat konsep abstrak pada grup atau gelanggang menjadi menarik untuk dikaji, seperti graf menghadirkan bentuk fisik dari suatu grup dengan relasi antar elemennya terlihat kasat mata. Akibatnya, jarak antar elemen pada grup juga memungkinkan untuk didefinisikan menggunakan karakteristik dari graf itu sendiri.

Beberapa studi terkait representasi graf pada grup diantaranya adalah representasi graf koprima yang diperkenalkan pada tahun 2014 (Ma et al., 2014). Graf koprima sendiri kemudian dikembangkan pada grup dihedral hingga graf quartenion yang diperumum (Husni et al., 2022; Nurhabibah, et al., 2021; Syarifudin et al., 2021). Selain graf koprima, pada tahun 2016 hadir graf non-koprima (Mansoori et al., 2016) yang kemudian dikembangkan pada grup dihedral dan grup quartenion yang diperumum (Misuki et al., 2021; Nurhabibah et al., 2022). Studi representasi graf pada graf koprima dan graf non-koprima berusaha menggambarkan hubungan antara elemen pada grup, sehingga hubungan antar subgrup suatu grup tidak tampak. Untuk melihat hubungan antara subgrup, kemudian didefinisikan representasi graf irisan. Beberapa studi pada graf irisan pada grup dihedral telah memberikan hasil terkait hubungan antar subgrup (Nurhabibah, et al., 2021; Ramdani et al., 2022).

Studi terbaru untuk representasi graf atas grup adalah graf pangkat yang mana simpulnya merupakan semua elemen dari grup, dan dua simpul bertetangga apabila satu simpul dapat dituliskan sebagai perpangkatan simpul lainnya. Graf pangkat diperkenalkan oleh Clevam dan Sattanathan pada tahun 2013, dan studi terkait graf pangkat kemudian menjadi trend (Abawajy et al., 2013; Aşkin & Büyükköse, 2021; Chelvam & Sattanathan, 2013). Studi terbaru terkait graf pangkat dilakukan pada grup dihedral (Asmarani et al., 2021), dan pada artikel ini diberikan sifat-sifat pada graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo yang berorde suatu bilangan prima.

METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah *deductive proof*, yakni dengan melakukan studi kasus yang kemudian dikonstruksi suatu *conjecture*. Berdasarkan *conjecture* yang dibangun kemudian dilakukan proses *deductive proof*, jika tidak terbukti maka akan dilakukan modifikasi pada studi kasus untuk mendapatkan *conjecture* lain. Dan apabila proses berhasil, maka *conjecture* akan menjadi sebuah *theorem* yang merupakan hasil penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Grup bilangan bulat modulo (*integer modulo group*) berorde n adalah himpunan semua bilangan bulat non-negatif yang lebih kecil dari n yang dilengkapi operasi modulo n .

Definisi 1 (Juliana et al., 2021). Grup G dikatakan disebut grup bilangan bulat modulo berorde n , adalah grup yang terdiri dari himpunan semua bilangan bulat non-negatif yang dilengkapi operasi tambah modulo n . Atau dinotasikan dengan himpunan $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ dengan operasi $+_{mod(n)}$.

Representasi graf pangkat dari suatu grup didefinisikan sebagai graf dengan semua simpul merupakan anggota grup dan dua elemen grup dikatakan bertetangga apabila salah satu elemen merupakan pangkat dari elemen lainnya. Definisi formal dari graf pangkat diberikan sebagai berikut.

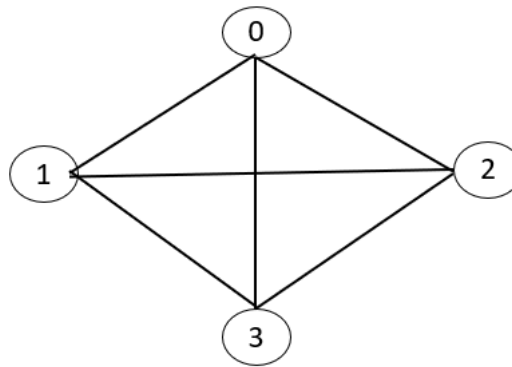
Definisi 2 (Asmarani et al., 2021). Misalkan G suatu grup, graf pangkat dari G adalah graf sederhana yang semua simpulnya adalah anggota grup G , dan dua simpul berbeda $a, b \in G$ bertetangga apabila $a = b^x$ atau $b = a^y$ untuk $x, y \in \mathbb{N}$. Graf pangkat dari grup G dinotasikan dengan Γ_G .

Untuk grup hingga jelas bahwa setiap anggota grup akan bertetangga dengan unsur identitas. Sebagai contoh diberikan grup $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ maka

Tabel 1. Kebertetangaan elemen di $\mathbb{Z}_4$

Elemen $\mathbb{Z}_4$	0	1	2	3
0	-	$1^4 = 0$	$2^2 = 0$	$3^4 = 0$
1	$1^4 = 0$	-	$1^2 = 2$	$3^3 = 1$
2	$2^2 = 0$	$1^2 = 2$	-	$3^2 = 2$
3	$3^4 = 0$	$3^3 = 1$	$3^2 = 2$	-

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh semua elemen pada grup $\mathbb{Z}_4$ saling bertetangga sehingga didapatkan graf pangkat dari $\mathbb{Z}_4$ merupakan graf lengkap K_4 .



Gambar 1. Graf pangkat dari grup $\mathbb{Z}_4$

Berdasarkan graf pangkat yang diperoleh, bentuk abstrak dari grup dapat dibuat nyata, dan seperti yang telah dilakukan pada studi sebelumnya, numerical invariant dari graf dapat diperoleh (Syarifudin, et al., 2021). Numerical invariant pada contoh ini diantaranya diameter, bilangan kromatik, dan bilangan *clique*.

Salah satu sifat yang menarik adalah, graf prima dari grup bilangan hlat modulo n akan selalu berupa graf lengkap K_n untuk n suatu bilangan prima. Hal ini dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 1. Misalkan diberikan grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$. Jika n suatu bilangan prima, maka graf pangkat dari $\mathbb{Z}_n$ adalah suatu graf lengkap K_n .

Bukti: Misalkan n suatu bilangan prima dan $a, b \in \mathbb{Z}_n$ sebarang. Karena a dan b bilangan yang lebih kecil dari n , dan n adalah bilangan prima, maka $(a, n) = (b, n) = 1$. Dengan perkataan lain a dan b relatif prima dengan n . Oleh karena itu terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\alpha_1 a + \beta_1 n = 1$ dan $\alpha_2 a + \beta_2 n = 1$. Dan karena operasi yang berlaku di grup adalah operasi tambah modulo n , maka didapatkan $\alpha_1 a = \alpha_2 b = 1$, atau dengan kata lain $a^{\alpha_1} = b^{\alpha_2} = 1$. Akibatnya

a dan b juga merupakan pembangun grup, atau $\langle a \rangle = \langle b \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_n$, sehingga jelas $a = b^\gamma$ untuk suatu $\gamma \in \mathbb{N}$. Karena a dan b diambil sebarang, akibatnya setiap dua elemen di grup pasti bertetangga, jadi graf prima dari grup $\mathbb{Z}_n$ adalah graf lengkap K_n . ■

Catat bahwa Teorema 1 hanya berlaku satu arah, dengan contoh sebelumnya di grup $\mathbb{Z}_4$ menunjukkan arah sebaliknya tidak berlaku. Teorema ini memudahkan untuk mendapatkan *numerical invariant* dari graf koprima pada grup $\mathbb{Z}_n$ untuk n bilangan prima. Berikut definisi beberapa *numerical invariant* dari suatu graf.

Definisi 3 (Syarifudin, 2021). Misalkan G suatu graf dengan $V(G)$ berupa himpunan simpul dan $E(G)$ berupa himpunan sisi.

1. Misalkan $x \in V(G)$, *eccentricity* dari x adalah jarak maksimum x ke simpul lain, dinotasikan dengan $ec(x) = \max\{d(x, y) | y \in V(G)\}$
2. Radius dari graf G adalah minimum *eccentricity* dari semua titik di $V(G)$, dinotasikan $rad(G) = \min\{ec(x) | x \in V(G)\}$
3. Diameter dari graf G adalah maksimum *eccentricity* dari semua titik di $V(G)$, dinotasikan $dia(G) = \max\{ec(x) | x \in V(G)\}$
4. Bilangan kromatik dari suatu graf adalah jumlah minimum warna untuk mewarnai graf G , dinotasikan dengan $\chi(G)$
5. Bilangan *clique* dari graf G adalah jumlah simpul maksimal dari graf G yang membentuk subgraf lengkap, dinotasikan dengan $\omega(G)$.

Radius dan diameter dari graf prima $\mathbb{Z}_n$ dapat ditentukan dengan mudah menggunakan rumus pada Teorema berikut.

Teorema 2. Misalkan diberikan grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$. Jika n bilangan prima maka diperoleh $rad(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = dia(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 1$.

Bukti: Berdasarkan Teorema 1, diperoleh $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ merupakan graf lengkap K_n , akibatnya setiap dua titik saling bertetangga. Diperoleh *eccentricity* dari semua titik di $V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ adalah satu. Berdasarkan definisi, maka radius dan diameter dari graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ bernilai 1. ■

Bilangan kromatik dan bilangan *clique* dari graf prima juga dapat ditentukan dengan mudah menggunakan rumus berikut.

Teorema 3. Misalkan diberikan grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$. Jika n bilangan prima maka diperoleh $\omega(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \chi(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = n$.

Bukti: Berdasarkan Teorema 1, diperoleh $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ merupakan graf lengkap K_n , akibatnya setiap dua titik saling bertetangga. Karena setiap dua titik bertetangga, maka setiap titik harus memiliki warna berbeda, sehingga bilangan kromatik dari graf pangkat $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah sejumlah $|V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})| = n$. Kemudian karena graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf lengkap, jelas bilangan subgraf lengkap maksimumnya adalah $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ sendiri, sehingga bilangan *clique* dari graf pangkat $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah sejumlah $|V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})| = n$. ■

SIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf pangkat dari grup bilangan bulat modulo yang berorde suatu bilangan prima n adalah graf lengkap K_n
2. Graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo yang berorde suatu bilangan prima memiliki radius dan diameter yang sama, yaitu 1. Dan juga memiliki bilangan kromatik dan bilangan *clique* yang sama, yaitu n .

SARAN

Diharapkan dengan penelitian ini dapat menambah literatur terkait sifat-sifat graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo yang berorde suatu bilangan prima.

REFERENSI

- Abawajy, J., Kelarev, A., & Chowdhury, M. (2013). Power Graphs: A Survey. In *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* (Vol. 1, Issue 2). www.ejgta.org
- Aşkin, V., & Büyükköse, Ş. (2021). The Wiener Index of an Undirected Power Graph. *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, 11(01), 21–29. <https://doi.org/10.4236/alamt.2021.111003>
- Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Adhitya, G., Wardhana, W., & Switrayni, W. (2021). *Eigen Mathematics Journal The Power Graph of a Dihedral Group*. 4(2). <https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.117>
- Chelvam, T., & Sattanathan, M. (2013). Power graph of finite abelian groups. *Algebra and Discrete Mathematics*, 16(1), 33–41.
- Husni, M. N., Syafitri, H., Siboro, A. M., Syarifudin, A. G., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). THE HARMONIC INDEX AND THE GUTMAN INDEX OF COPRIME GRAPH OF INTEGER GROUP MODULO WITH ORDER OF PRIME POWER. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 16(3), 961–966. <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp961-966>
- Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021). Some Characteristics of Cyclic Prime, Weakly Prime and Almost Prime Submodule of Gaussian Integer Modulo over Integer. *AIP Conference Proceedings*, 2329(February). <https://doi.org/10.1063/5.0042586>
- Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The Coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, 3(3), 13–23. <https://doi.org/10.22108/ijgt.2014.4363>

- Mansoori, F., Erfanian, A., & Tolue, B. (2016). Non-coprime graph of a finite group. *AIP Conference Proceedings*, 1750(June 2016). <https://doi.org/10.1063/1.4954605>
- Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Irwansyah. (2021). Some results of non-coprime graph of the dihedral group D_{2n} for n a prime power. *AIP Conference Proceedings*, 2329(February). <https://doi.org/10.1063/5.0042587>
- Nurhabibah, Malik, D. P., Syafitri, H., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). *Some results of the non-coprime graph of a generalized quaternion group for some n* . 020001. <https://doi.org/10.1063/5.0114975>
- Nurhabibah, N., Gazir Syarifudin, A., Gede Adhitya Wisnu Wardhana, I., & Aini, Q. (2021). *Eigen Mathematics Journal The Intersection Graph of a Dihedral Group*. 4(2). <https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.119>
- Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., & Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some Results of The Coprime Graph of a Generalized Quaternion Group Q_{4n} . *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(1), 29–33. <https://doi.org/10.15408/inprime.v3i1.19670>
- Ramdani, D. S., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2022). THE INTERSECTION GRAPH REPRESENTATION OF A DIHEDRAL GROUP WITH PRIME ORDER AND ITS NUMERICAL INVARIANTS. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 16(3), 1013–1020. <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp1013-1020>
- Syarifudin, A. G., Nurhabibah, Malik, D. P., & dan Wardhana, I. G. A. W. (2021). Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group D_{2n} . *Journal of Physics: Conference Series*, 1722(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012051>
- Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021). The Clique Numbers and Chromatic Numbers of The Coprime Graph of a Dihedral Group. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1115(1), 012083. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1115/1/012083>